562. 單純群ノ一ツノ Class ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

自分自身及ビ單位群以外ニ Lie ノ意味ノ Normalteiler ヲモタナイ Lie 群ヲ L-simple デアルト呼ブコトニスル。之レニ對シテ普通ノ群論的ナ意味デ simple ノ群ヲ g-simple デアルト呼バウ。L-simple ナ群ガ semi-simple デアレバ即チソノ center ガ discrete ナラバ此ノ群ハ g-simple ナ群ニ locally topologically isomorphic デアル。

次ニ斯ル g-simple ナ Lie 群ヲ purely algebraic ニ characterise デキルコトヲ示シタイト思フ。

I. 假定. 抽象群 $\mathfrak{g}$ ヲ g-simple トスル。

$a \in \mathfrak{g}$ ニ對シテ

$$\prod_{i=1}^{n}\left[c_i(b_i a b_i^{-1} a^{-1})c_i^{-1}\right] \quad (n\text{ハ或 fixed integer})$$

ノ形ニ書ケル $\mathfrak{g}$ ノ要素全体ノ集合ヲ $\mathfrak{M}(a)$ ヲ以テ表ハス。然ラバ $\mathfrak{M}(a) \ni e$ ($\mathfrak{g}$ ノ單位) 且ツ $\mathfrak{g}$ ガ g-simple ナコトカラ $a \neq e$ ノトキハ $\mathfrak{M}(a) \neq e$. コヽデ次ノ假定ヲスル。

1) 任意ノ $a \neq e$ ニ對シテ

$$\mathfrak{M}(a) \supseteqq \left[\mathfrak{M}(a')\right]^{-1} \quad (\mathfrak{M}(a')\text{ノ要素ノ逆要素ノ集合})$$

$$\mathfrak{M}(a) \supseteqq \left[\mathfrak{M}(a'')\right]^{2} \quad (\mathfrak{M}(a'')\text{ノ任意ノ二要素ノ積ノ集合})$$

ヲ満足スル如キ $a' \neq e$, $a'' \neq e$ ガ存在スル。

2) 次ノ條件ヲ滿足スル可附番点列 $\{a_i\}$, $a_i \neq e$ ガ存在スル。

(α) $\mathfrak{M}(a_i) \geqq \mathfrak{M}(a_{i+1})$

且ツ Durchschnitt $\{\mathfrak{M}(a_i)\} = e$

(β) 任意ノ $\mathfrak{M}(a)$, $a \neq e$ ニ對シテ充分 i ヲ大キクトレバ

$$\mathfrak{M}(a) \geqq \mathfrak{M}(a_i)$$

3) 各 $\mathfrak{M}(a_i)$ ニ對シテ適當ニ $a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{ik(i)}$ ヲトレバ

$$\mathfrak{G} = \sum_{l=1}^{k(i)} \{a_{il} \cdot \mathfrak{M}(a_i)\}$$

4) 各 $\mathfrak{M}(a_i)$ ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ガ generate サレル。即チ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ要素ハ $\mathfrak{M}(a_i)$ ノ要素有限コヲ compose シタモノトシテ得ラレル。

II. 結論. $\{\mathfrak{M}(a)\}$ ヲ e ノ近傍系; $\{b \cdot \mathfrak{M}(a)\}$ ヲ b ノ近傍系トスレバ 1), 2) ニヨリ $\mathfrak{G}$ ハ topological group ヲ作ル。コノ top. g. $\mathfrak{G}$ ハ 2) ニヨリ第一可附番公理ヲ滿足スルカラ metrisierbar (角谷靜夫氏定理——學士院記事, 1936, p. 82) 且 $b\mathfrak{M}(a)b^{-1} = \mathfrak{M}(a)$ カラソノ距離ハ

$$(*) \quad d(a, b) = d(caf, cbf)$$

ヲ滿足スルヤウニトレル。3) ニヨレバコノ metrical group ハ totally bounded デアル。

ヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ (D. van

Dantzig ノ所謂 Kompletlierung) ヲ考ヘレバ compact metrische ナ group ニナル。

$\overline{\mathfrak{G}}$ ハ 4) ト同ジ條件ヲ滿足スルカラ connected ナコトガワカル。故ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ connected, compact 且ツ separable ナ群デアリ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ニ於テ dense ナ subgroup デアル。

<u>結論ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ connected, compact 且ツ g-simple ナ Lie 群ニ locally topologically isomorphic ト云フノデアル</u>。(特ニ有限次元ニナルコトニ注意サレタイ)

III <u>証明</u>. $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ connected, compact 且ツ separable ダカラ connected, compact ナ Lie 群ノ系列 $\{\mathfrak{G}_i\}$ ヲ以テ <u>G_n-adic ニ generate</u> サレル。(H. Freudenthal, Ann. of Math. 1936, p.57)

即チ $\mathfrak{G}_i$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ニ continuous homomorphic デアリ

$$\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}_i \simeq \mathfrak{G}_i \text{ (topological isomorphism)}$$

デ定義サレルヨウナ $\overline{\mathfrak{G}}$ ニ於イテ閉ヂタ Normalteiler $\mathfrak{N}_i$ ハ

$$\mathfrak{N}_i \supseteq \mathfrak{N}_{i+1}, \quad \underset{i}{\text{Durchschnitt}} \{\mathfrak{N}_i\} = e$$

ヲ滿足スル。

$\overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{G}_i$ ハ compact metrical ナ group ダカラ cont. homomorphism $\overline{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}_i$ ハ open mapping デアル。ヨツテ $\overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow \mathfrak{G}_i$ ニ於テ $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}_i'$ トスレバ $\mathfrak{G}_i'$

ハ $\mathfrak{g}_i$ ニ於テ dense（$\mathfrak{g}$ ガ $\overline{\mathfrak{g}}$ デ dense ダカラ）、故ニ $\mathfrak{g}_i$ ノ abg. Hülle ハ $\mathfrak{g}_i$ 自身デアル。且ツ $\mathfrak{H}_i \longrightarrow e$ カラ $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_i$（$\mathfrak{g}$ ハ g-simple）即チ $\overline{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}_i$

故ニ $\overline{\mathfrak{g}}$ ハ compact, connected ナ Lie 群デアル。

$\overline{\mathfrak{g}}$ ハ尚 L-simple ナコトガ上ト同様ニシテワカル。ヨッテ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ center ガ有限群ナコトガ云ヘレバ定理ガ証明サレタコトニナル。

若シ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ center $\mathfrak{z}$ ガ有限群デナイナラバ，$\overline{\mathfrak{g}}$ ガ compact ダカラ，e ハ $\mathfrak{z}$ ニ於テ孤立点デナイ。ヨッテ Cartan ノ定理 Mémorial des Sc. Math. XLII p. 22 ニヨリ $\mathfrak{z}$ ハ少クトモ one-parameter ノ Lie 群ヲ含ム。所ガ 4) ニヨリ $\overline{\mathfrak{g}}$ ハソノ commutator group ト一致スルカラコンナコトハアリ得ナイ。

IV. van der Waerden ノ定理.

g-simple ナ connected, compact ナ Lie 群ニハ上ノ如キ topologisierung ガ出来ルト云フノガ van der Waerden ノ定理（M. Z, 1933, p. 780）デアリ上ノ結果ハソノ逆デアル。

ヨッテ g-simple ナ connected, compact ナ Lie 群ガ purely algebraic ニ characterise サレタワケデアル（但シ Komplettierung ナル Process ノ入レノハ問題ノ性質上已ムヲ得ナイ所デアリマセウ）